IV. Sistemi di radici

In questo capitolo, E denota uno spazio euclideo reale (di dimensione finita). (,) denota il prodotto scalare (= forma bilineare simmetrica definita positiva) definito su E. Si suppone che siano familiari al lettore le nozioni elementari di geometria euclidea. In particolare, $|v| = \sqrt{(v,v)}$ è la lunghezza del vettore v, e l'angolo θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) fra due vettori u , v è definito dalla formula $\cos\theta = (u, v)/ |u||v|$.

1. Riflessioni in uno spazio euclideo

Ricordiamo innanzitutto che :

Definizione 1. *Un endomorfismo invertibile* $T : E \rightarrow E$ *si dice* **isometria** *(o* **trasformazione ortogonale** *) se preserva il prodotto scalare, i.e. se* $(Tv, Tw) = (v, w)$ *per ogni* $v,w \in E$.

Definizione 2. *Diremo che un'isometria r di E è una* **riflessione** *se* $Im(r-1) = (r-1)E$ *ha dimensione 1 , i.e.* $(r-1)E = C = <\alpha>$, $0 \neq \alpha \in E$.

C è il **centro** della riflessione r. L'iperpiano H = Ker(r - 1) (= $Fix_E(r)$) è l'**asse** di r.

Lemma 1. *Sia r una riflessione dello spazio euclideo E , avente centro* $C = <\alpha>$, *e asse H. Allora :*
i) $H = \alpha^{\perp} = \{ v \in E \mid (v, \alpha) = 0 \}$, *i.e. H è l'iperpiano ortogonale al vettore* α *;*
ii) r è un'involuzione ;
iii) rispetto a una base conforme alla decomposizione $E = H \perp C$, *r è rappresentata dalla matrice* $diag(-1, I_{n-1})$. *In particolare,* $\det r = -1$.

Dim. i) Sia $x \in H$. E' $(x,v) = (rx,rv) = (x,rv)$, cioè $(x,(r-1)v) = 0$, per ogni $v \in E$. In altre parole H è ortogonale a C.
ii) $r(\alpha) = \alpha + a\alpha$, $0 \neq a \in \mathbf{R}$, ovvero $r(\alpha) = b\alpha$, $b \in \mathbf{R}$, $b \neq 0,1$. Segue $(\alpha,\alpha) = (r(\alpha),r(\alpha)) = b^2(\alpha,\alpha)$. Da cui $b = -1$. Dunque r è un'involuzione.
iii) E' chiaro.

Lemma 2. *Sia* $C = <\alpha>$, $0 \neq \alpha \in E$. *Esiste una e una sola riflessione r di centro C, e per ogni* $x \in E$ *si ha :*

$$(*) \qquad r(x) = x - (2(x, \alpha)/(\alpha, \alpha))\,\alpha$$

Dim. Per il Lemma precedente, punto iii), vi è al più una riflessione di centro C. Resta da verificare che r, così come definita dalla formula (*), soddisfa le condizioni richieste. Si vede facendo i conti, che $(rx,ry) = (x,y)$

per ogni $x,y \in E$. Dunque r è un'isometria. Inoltre è chiaro da (*) che $(r-1)E = C$.

Nel seguito, denoteremo con r_α la riflessione di E avente centro $C = <\alpha>$.

Esercizio. Sia g un'isometria di E. Allora $gr_\alpha g^{-1} = r_{g(\alpha)}$.

Più generalmente si dà la seguente :

Definizione 3. *Sia $C = <\alpha>$, $0 \neq \alpha \in E$, e sia H un iperpiano di E. Si dice* **simmetria di centro C e asse H**, *ogni automorfismo s di E tale che : 1) $s(\alpha) = -\alpha$; 2) $Fix_E(s) = H$.*

Le riflessioni sono perciò le simmetrie ortogonali. E' utile per il seguito il seguente :

Lemma 3. *Sia Φ un insieme finito di generatori dello spazio E, e sia α un vettore non-nullo di E. Esiste al più una simmetria s di centro $C = <\alpha>$ che lascia Φ invariante. In particolare, se la riflessione r_α lascia Φ invariante, necessariamente $s = r_\alpha$.*

Dim. Siano s, s' due simmetrie di E che fissano Φ, e si consideri $u = ss'$. Allora si ha $u(\Phi) = \Phi$, e $u(\alpha) = \alpha$. Poichè inoltre, in forza di 1) e 2), $(s-1)E = <\alpha>$, e similmente per s', segue che u opera come l'identità sullo spazio quoziente $E/<\alpha>$. Dunque u ha tutti gli autovalori uguali a 1. D'altronde, poichè Φ è finito, u induce su Φ una permutazione di ordine finito h, e poichè Φ genera E, ne segue che $u^h = 1$. Posto $n = \dim E$, il polinomio minimo di u è dunque uguale a $t - 1 = \text{M.C.D.}((t-1)^n, t^h - 1)$, cioè $u = 1$. Si conclude che $s = s'$.

2. Sistemi di radici e gruppi di Weyl

Definizione 1. *Si dice che un sottoinsieme Φ di uno spazio euclideo E è un* **sistema di radici** *in E, se sono soddisfatti gli assiomi seguenti :*

i) Φ è un insieme finito di generatori non-nulli di E ;

ii) per ogni $\alpha \in \Phi$, gli unici multipli di α che appartengono a Φ sono $\pm\alpha$;

iii) per ogni $\alpha \in \Phi$, $r_\alpha(\Phi) = \Phi$;

iv) per ogni $\alpha, \beta \in \Phi$, $2(\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha) \in Z$.

Gli elementi di Φ sono le **radici**, *e la dimensione di E è il* **rango** *del sistema Φ.*

Notazione : Per ragioni di brevità, il numero $2(\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha)$ sarà d'ora in poi denotato con il simbolo $<\beta, \alpha>$.

Osservazioni :

1) Sia da ii) che da iii) scende che $\Phi = -\Phi$.

2) Se Φ è un sistema di radici in E, tale rimane se si rimpiazza (,) con un suo multiplo positivo.

3) Un sistema di radici, secondo la nostra definizione, viene anche detto *sistema ridotto.* Se si lascia cadere l'assioma 2), si parla di *sistema non ridotto.* Si è visto al termine del Capitolo precedente come i sistemi ridotti si presentino in modo naturale nella teoria delle algebre semisemplici di Lie su un campo F algebricamente chiuso di caratteristica zero. Sistemi non ridotti si presentano se si lascia cadere l'ipotesi che F sia algebricamente chiuso. (Si noti che se Φ è un sistema non ridotto, e $\alpha \in \Phi$, in forza di iv) gli unici multipli di α che possono stare in Φ sono $\pm\alpha$, $\pm(1/2)\alpha$, $\pm 2\alpha$. D'altronde, $\pm(1/2)\alpha$ e $\pm 2\alpha$ non possono stare entrambi in Φ, poichè $<\pm(1/2)\alpha, 2\alpha> \notin Z$. Si verifica anche facilmente che $\Phi' = \{\alpha \in \Phi \mid 2\alpha \notin \Phi\}$ è un sistema ridotto.)

Definizione 2. *Sia Φ un sistema di radici in E, e sia $W = W(\Phi) = < r_\alpha \mid \alpha \in \Phi >$ il sottogruppo di GL(E) generato dalle riflessioni r_α $(\alpha \in \Phi)$. W prende il nome di* **gruppo di Weyl** *(associato al sistema Φ).*

Lemma 1. *W è un gruppo finito.*

Dim. In forza di iii), W opera come un gruppo di permutazioni su Φ. Poichè Φ genera E, l'azione di W su Φ è fedele (i.e. ha nucleo nullo). Dunque W è isomorfo a un sottogruppo del gruppo simmetrico su Φ, e pertanto, essendo Φ finito, W è finito.

Siano Φ, Φ', due sistemi di radici negli spazi euclidei E, E' rispettivamente. E' naturale dare la seguente :

Definizione 3. *Φ e Φ' si dicono* **isomorfi** *se esiste un isomorfismo f (non necessariamente un'isometria) da E a E', tale che sia $f(\Phi) = \Phi'$, e $<\beta, \alpha> = <f(\beta), f(\alpha)>$ per ogni coppia di radici $\alpha, \beta \in \Phi$. Si dirà che f è un* **isomorfismo** *di Φ su Φ'. Nel caso in cui $E = E'$ e $\Phi = \Phi'$, si indicherà con Aut Φ il* **gruppo degli automorfismi** *di Φ.*

Si osserva che :

Lemma 2. *Se due sistemi di radici Φ, Φ' sono isomorfi, i corrispondenti gruppi di Weyl $W(\Phi)$, $W(\Phi')$ sono isomorfi.*

Dim. Sia f un isomorfismo fra i sistemi di radici Φ e Φ'. Si verifica in modo immediato che, per ogni $\alpha, \beta \in \Phi$, si ha: $r_{f(\alpha)}(f(\beta)) = f(r_\alpha(\beta))$, da cui anche $r_{f(\alpha)}(f(\beta)) = f r_\alpha f^{-1}(f(\beta))$. Poichè $f(\Phi) = \Phi'$, e Φ' genera E', si ha $r_{f(\alpha)} =$

$fr_\alpha f^{-1}$, e si conclude che l'applicazione $w \to f\,w\,f^{-1}$ realizza un isomorfismo fra $W(\Phi)$ e $W(\Phi')$.

Lemma 3. *Sia Φ un sistema di radici in E.*
i) $\mathrm{Aut}\,\Phi$ è costituito da tutti e soli gli automorfismi di E che lasciano Φ invariante :
ii) Il gruppo di Weyl W è un sottogruppo normale di $\mathrm{Aut}\,\Phi$.

Dim. i) In forza della Def. 3 , basta provare che, se f è un automorfismo di E che lascia Φ invariante, per ogni $\alpha, \beta \in \Phi$ si ha $<\beta, \alpha> = <f(\beta), f(\alpha)>$. A tale scopo, cominciamo con l'osservare che: (*) $f(r_\alpha(\beta)) = f(\beta - <\beta, \alpha>\alpha) = f(\beta) - <\beta, \alpha> f(\alpha)$. Consideriamo ora l'automorfismo $f\,r_\alpha f^{-1}$. $f\,r_\alpha f^{-1}(f(\beta)) = f(r_\alpha(\beta)) \in \Phi$, dal momento che $r_\alpha(\beta) \in \Phi$. E poichè al variare di β $f(\beta)$ percorre Φ, si conclude che $f\,r_\alpha f^{-1}(\Phi) = \Phi$. Inoltre, se H_α denota l'asse di r_α , $f\,r_\alpha f^{-1}$ fissa punto per punto l'iperpiano $f(H_\alpha)$, e manda $f(\alpha)$ in $-f(\alpha)$. Segue da 1. Lemma 3 che $f\,r_\alpha f^{-1} = r_{f(\alpha)}$, dal momento che $f(\alpha) \in \Phi$. Ma allora $f\,r_\alpha f^{-1}(f(\beta)) = r_{f(\alpha)}(f(\beta))$. E poichè : (**) $r_{f(\alpha)}(f(\beta)) = f(\beta) - <f(\beta), f(\alpha)> f(\alpha)$, confrontando (*) con (**) si ottiene finalmente $<\beta, \alpha> = <f(\beta), f(\alpha)>$.
ii) Abbiamo provato in i) che, per ogni $f \in \mathrm{Aut}\,\Phi$, $\alpha \in \Phi$, è $f\,r_\alpha f^{-1} = r_{f(\alpha)}$. Si conclude dunque che W è un sottogruppo normale di $\mathrm{Aut}\,\Phi$.

E' utile introdurre la nozione di sistema duale di un sistema di radici :

Lemma 4. *Sia Φ un sistema di radici in E. Per ogni $\alpha \in \Phi$ si ponga $\alpha^* = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$, e $\Phi^* = \{\alpha^* \mid \alpha \in \Phi\}$. Allora :*
a) Φ^* è un sistema di radici in E . In particolare :
b) $<\beta^*, \alpha^*> = <\alpha, \beta>$ per ogni $\alpha, \beta \in \Phi$; e $|\alpha| > |\beta|$ sse $|\alpha^*| < |\beta^*|$.
c) $\Phi^{**} = \Phi$, e $W(\Phi^*) = W(\Phi)$.

Dim.

L'assioma i) è evidente. Se $\lambda\alpha^* \in \Phi^*$, deve essere $\lambda\alpha^* = \beta^*$ per qualche $\beta \in \Phi$. Dunque $2\lambda\alpha/(\alpha, \alpha) = 2\beta/(\beta, \beta)$, e quindi necessariamente $\alpha = \pm\beta$. Segue $\lambda = \pm 1$, e dunque ii) è soddisfatto. Notiamo che, poichè α e α^* sono proporzionali, $r_\alpha = r_{\alpha^*}$. Perciò, per ogni $\alpha, \beta \in \Phi$, si ha $r_{\alpha^*}(\beta^*) = r_\alpha(\beta^*) = r_\alpha(2\beta/(\beta, \beta)) = 2r_\alpha(\beta)/(r_\alpha(\beta), r_\alpha(\beta)) = r_\alpha(\beta)^* \in \Phi^*$. Dunque $r_{\alpha^*}(\Phi^*) = \Phi^*$, e iii) è soddisfatto. Infine, essendo per ogni $\alpha \in \Phi$, $(\alpha^*, \alpha^*) = 4/(\alpha, \alpha)$, si ha : $<\beta^*, \alpha^*> = 2(\beta^*, \alpha^*)/(\alpha^*, \alpha^*) = 8(\beta, \alpha)(\alpha, \alpha)/4(\beta, \beta)(\alpha, \alpha) = 2(\beta, \alpha)/(\beta, \beta) = <\alpha, \beta>$. Ciò prova, con la prima parte di b), che iv) è soddisfatto e dunque Φ^* è un sistema di radici. Quanto all'asserto sulle lunghezze, segue anch'esso da $(\alpha^*, \alpha^*) = 4/(\alpha, \alpha)$.
Si ha poi, per ogni $\alpha \in \Phi$, $\alpha^{**} = 2\alpha^*/(\alpha^*, \alpha^*) = 4\alpha/(\alpha, \alpha)/(4/(\alpha, \alpha)) = \alpha$, e dunque $\Phi^{**} = \Phi$. Infine, $r_\alpha = r_{\alpha^*}$ implica ovviamente $W(\Phi^*) = W(\Phi)$.

Definizione 4. *Diremo che Φ^* è il* **sistema di radici duale** *di Φ , e che α^* è la* **co-radice** *di α. Diremo inoltre che Φ è* **autoduale** *quando Φ è isomorfo a Φ^*.*

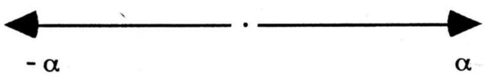
(Nel contesto delle algebre di Lie semisemplici , se $\alpha \in \Phi$ è identificato a $t_\alpha \in H$, α^* è identificato a h_α .)

3. Primi esempi di sistemi di radici .

In questo paragrafo descriviamo (a meno d'isomorfismi) i sistemi di radici di rango $n \leq 2$.
Sia E uno spazio euclideo reale di dimensione n :

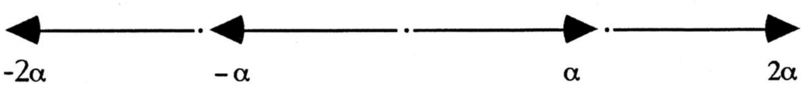
1) Se n = 1, l'unico sistema di radici contenuto in E è il sistema :

A_1 :



Il gruppo di Weyl $W(A_1)$ è ciclico di ordine 2 . (A_1 è il sistema di radici associato all'algebra sl(2,F).)

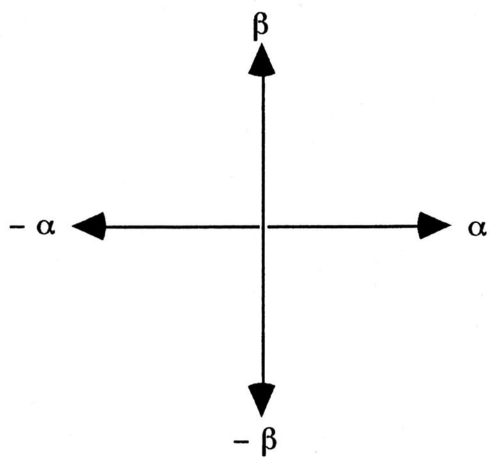
(L'unico sistema non-ridotto di rango 1 è :



)

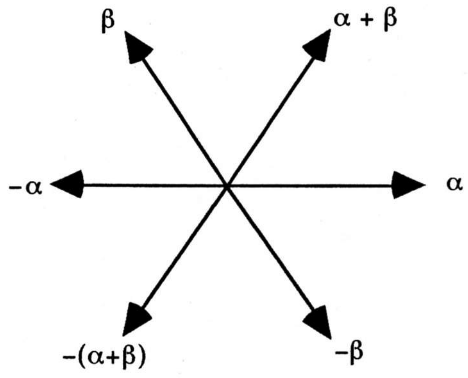
2) Se n = 2 , ogni sistema di radici ridotto contenuto in E è, come si provera' più avanti, isomorfo a uno dei seguenti :

$A_1 \times A_1$



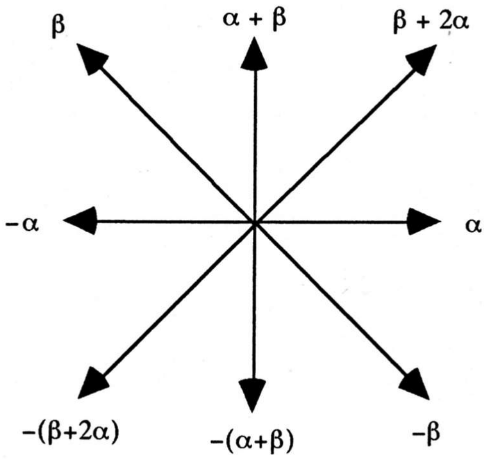
Il gruppo di Weyl $W(A_1 \times A_1)$ è diedrale di ordine 4 .

A_2



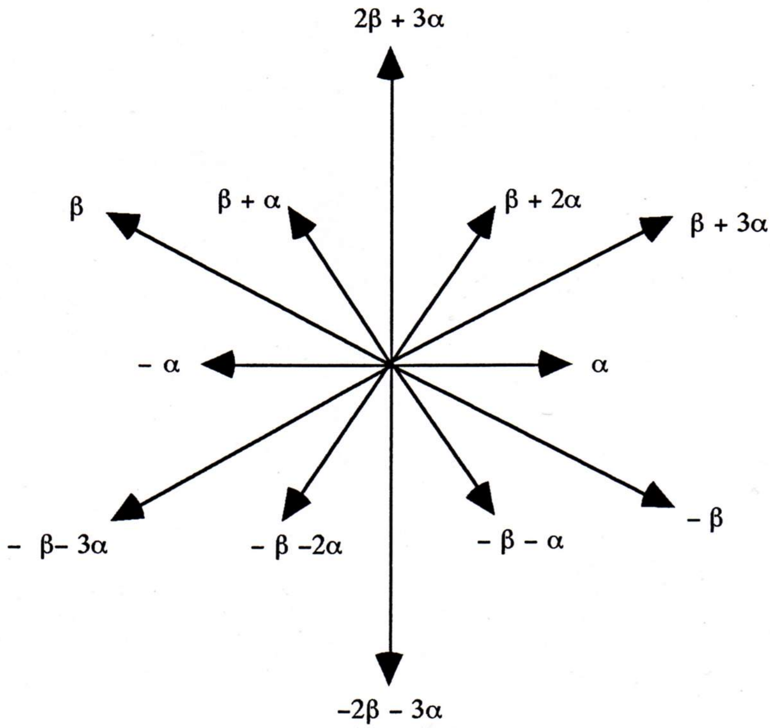
Il gruppo di Weyl $W(A_2)$ è diedrale di ordine 6 (isomorfo a S_3)

B_2



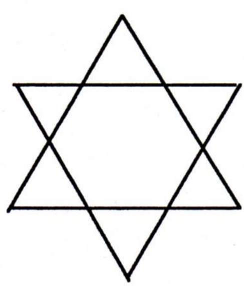
Il gruppo di Weyl $W(B_2)$ è diedrale di ordine 8 .

G_2



Il gruppo di Weyl $W(G_2)$ di un sistema di tipo G_2 è diedrale di ordine 12 .

(Suggerimento : per disegnare un sistema di radici di tipo G_2 , basta tracciare una stella di Davide..... :



)

Nota : In tutti i casi sopra illustrati, si verifica direttamente che gli assiomi che definiscono un sistema di radici sono soddisfatti. La struttura del gruppo di Weyl si deduce facilmente dal fatto che $W = < r_\alpha , r_\beta >$, e il prodotto $r_\alpha\, r_\beta$ è la rotazione di angolo 2θ , ove θ è l'angolo fra α e β. Poichè $\theta = \pi/2$, $(2/3)\pi$, $(3/4)\pi$, $(5/6)\pi$ nei casi $A_1 \times A_1$, A_2 , B_2 , G_2 , la rotazione $r_\alpha\, r_\beta$ ha ordine 2 , 3 , 4 , 6 rispettivamente.

3. Coppie di radici : lunghezze relative e catene .

Sia Φ un sistema di radici nello spazio euclideo E , e siano $\alpha, \beta \in \Phi$ radici non proporzionali , i. e. $\alpha \neq \pm \beta$.
Se θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) è l'angolo fra α e β , si ha $4\cos^2\theta = 4(\alpha, \beta)^2/(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)$ $= <\alpha, \beta> \cdot <\beta, \alpha>$. Poichè $<\alpha, \beta>$ e $<\beta, \alpha>$ sono interi, $4\cos^2\theta$ è un intero non-negativo. D'altra parte, essendo $\alpha \neq \pm\beta$, è $0 \leq \cos^2\theta < 1$, e dunque si ottengono per θ i seguenti possibili valori :

$$\theta = \pi/2, \pi/3, 2\pi/3, \pi/4, 3\pi/4, \pi/6, 5\pi/6 .$$

Tenendo poi conto del fatto che $<\alpha, \beta>$ e $<\beta, \alpha>$ hanno lo stesso segno, e supponendo ad es. $|\alpha| \leq |\beta|$, si ottengono per le lunghezze relative di α e β i valori elencati nella seguente tabella :

$<\alpha,\beta>$	$<\beta,\alpha>$	θ	$(\beta,\beta)/(\alpha,\alpha)$
0	0	$\pi/2$	?
1	1	$\pi/3$	1
-1	-1	$2\pi/3$	1
1	2	$\pi/4$	2
-1	-2	$3\pi/4$	2
1	3	$\pi/6$	3
-1	-3	$5\pi/6$	3

Lemma 1. *Siano $\alpha, \beta \in \Phi$ radici non proporzionali . Se $(\alpha, \beta) > 0$ (cioè l'angolo θ è strettamente acuto) , allora $\alpha - \beta \in \Phi$. Se invece $(\alpha, \beta) < 0$, allora $\alpha + \beta \in \Phi$.*

Dim. Se $(\alpha, \beta) > 0$, gli interi $<\alpha, \beta>$ e $<\beta, \alpha>$ sono entrambi positivi, e dalla tabella precedente segue che almeno uno dei due è uguale a 1.
Se $<\alpha, \beta> = 1$, $r_\beta(\alpha) = \alpha - <\alpha, \beta> \beta = \alpha - \beta \in \Phi$. Se $<\beta, \alpha> = 1$, allora $r_\alpha(\beta) = \beta - <\beta, \alpha> \alpha = \beta - \alpha \in \Phi$, e dunque anche $-(\beta - \alpha) = \alpha - \beta \in \Phi$.
Se invece $(\alpha, \beta) < 0$, da $(\alpha, -\beta) > 0$ segue $\alpha - (-\beta) = \alpha + \beta \in \Phi$.

Oss. : Il Lemma precedente fornisce solo condizioni sufficienti! (Cfr. ad es. i sistemi di rango 2 illustrati nel paragrafo 2.)

Definizione 1. *Siano $\alpha, \beta \in \Phi$ radici non proporzionali . Si dice* **α-catena (passante) per β** *l'insieme $\{ \beta + i\alpha \mid i \in Z, \beta + i\alpha \in \Phi \}$.*

Lemma 2. *Siano r , q i massimi interi non-negativi per i quali $\beta - r\alpha \in \Phi$ e $\beta + q\alpha \in \Phi$, rispettivamente. Allora la α-catena per β non presenta "lacune" fra $\beta - r\alpha$ e $\beta + q\alpha$.*

Dim. Supponiamo che esista un intero i , $-r \leq i \leq q$, tale che $\beta + i\alpha \notin \Phi$. Allora esistono degli interi p , s con $p < s$, nell'intervallo $[-r , q]$, tali che $\beta + p\alpha \in \Phi$, $\beta + (p+1)\alpha \notin \Phi$, $\beta + (s-1)\alpha \notin \Phi$, $\beta + s\alpha \in \Phi$. Segue , in forza del Lemma 1 , $(\alpha , \beta + p\alpha) \geq 0$, e $(\alpha , \beta + s\alpha) \leq 0$. Si ottiene $p(\alpha , \alpha) + (\alpha , \beta) \geq 0$, e $s(\alpha , \alpha) + (\alpha , \beta) \leq 0$, assurdo poichè $p < s$ e $(\alpha , \alpha) > 0$.

Lemma 3. *i) La riflessione r_α lascia invariante la α-catena per β . In particolare : r_α scambia fra loro $\beta - r\alpha$ e $\beta + q\alpha$.*
ii) $r - q = \langle\beta , \alpha\rangle$.

Dim. i) Per ogni $\beta + i\alpha \in \Phi$, $r_\alpha(\beta + i\alpha) = r_\alpha(\beta) - i\alpha = \beta - \langle\beta , \alpha\rangle\alpha - i\alpha = \beta - (\langle\beta , \alpha\rangle + i)\alpha \in \Phi$.
ii) $r_\alpha(\beta + q\alpha) = \beta - (\langle\beta , \alpha\rangle + q)\alpha$, e poichè, per ogni $q' < q$, $\langle\beta , \alpha\rangle + q' < \langle\beta , \alpha\rangle + q$, segue $\langle\beta , \alpha\rangle + q = r$.

Corollario. *Per ogni $\alpha , \beta \in \Phi$, con $\alpha \neq \pm\beta$, la α-catena per β ha al più lunghezza 4 .*

Dim. La α-catena per β ha la stessa lunghezza della α-catena per $\beta' = \beta - r\alpha$. Siano $\beta' - r'\alpha$ e $\beta' + q'\alpha$ gli estremi di tale catena. Allora $r' = 0$, e , per il punto ii) del Lemma precedente , e tenendo conto della tabella sopra riportata , $-q' = \langle\beta', \alpha\rangle = 0 , -1 , -2 , -3$. Poichè $q' + 1$ è la lunghezza della catena, si ha l'asserto .

4. Sistemi positivi e sistemi fondamentali .

Sia Φ un sistema di radici nello spazio euclideo E , e sia $W = W(\Phi)$ il suo gruppo di Weyl.

Definizione 1. *Diremo* **ordinamento** *(su E) ogni sottoinsieme E^+ di E tale che :*
i) se $v_1 , v_2 \in E^+$, allora $v_1 + v_2 \in E^+$
ii) se $v \in E^+$, per ogni reale positivo λ , $\lambda v \in E^+$
iii) per ogni $v \in E$, si verifica una e una sola delle seguenti condizioni :
$$v \in E^+, \ -v \in E^+, \ v = 0 .$$